Un corpo 2 è incernierato al telaio 1. Si suppone che tale corpo:

1) consista in una verga rigida di lunghezza l = 2 * r2;
2) sia incernerato in corrispondenza ad un estremo della verga
3) abbia baricentro G2 posizionato nella mezzeria dell'asta stessa, cosicchè G3 dista dalla cerniera dalla quantità r2;
4) abbia posizione perfettamente individuata dall'angolo $\vartheta 2$ di inclinazione dell'asse della verga misurata in senso antiorario a partire dalla verticale locale, con versore diretto verso il basso (concorde con l'aggelerazione gravitazionale).

Si definisce, dunque, l'angolo

$$\theta 2(t)$$

La posizione del baricentro G2 del corpo 2 è identificata da un vettore nel piano PG2 avente le due coordinate PG2x e PG2y.

$$PG2x(t) := r2 \sin(\theta 2(t))$$
$$PG2y(t) := -r2 \cos(\theta 2(t))$$

Derivando rispetto al tempo le funzioni scalari posizione x ed y di G2, si ottengono le componenti x ed y della velocità del baricentro

$$VG2x(t) := r2 \cos(\theta 2(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta 2(t) \right)$$
$$VG2y(t) := r2 \sin(\theta 2(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta 2(t) \right)$$

Analogamente, derivando le velocità del baricentro si ottengono le componenti x ed y delle accelerazioni

$$AG2x(t) := -r2 \sin(\theta 2(t)) \left(\frac{d}{dt} \theta 2(t) \right)^2 + r2 \cos(\theta 2(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} \theta 2(t) \right)$$

$$AG2y(t) := r2\cos(\theta 2(t))\left(\frac{d}{dt}\theta 2(t)\right)^2 + r2\sin(\theta 2(t))\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta 2(t)\right)$$

Per un corpo nel piano si possono scrivere tre equazioni della dinamica.
In tali equazioni compariranno:

m2 = massa della verga;
R12x = componente x della reazione della cerniera sulla verga (tale componente non è costante ma dipende dal tempo);
R12y = componente y della reazione della cerniera sulla verga (anche tale componente dipende dal tempo);
IG2 = momento d'inerzia (ovviamente di massa) baricentrico della verga rispetto ad un asse ortogonale al piano del moto (e quindi parallelo all'asse della cerniera) passante per il baricentro G2

Due equazioni si riferiscono alle componenti *x* ed *y* del bilancio delle forze:

eq1:= prima equazione , ovvero -----> R12x = m2 * AG2x(t);
eq2 := seconda equazione, -----> R12y - m2 * g = m2 * AG2y(t);

$$eq1 := R12x = m2\left(-r2\sin(\theta 2(t))\left(\frac{d}{dt}\theta 2(t)\right)^2 + r2\cos(\theta 2(t))\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta 2(t)\right)\right)$$

$$eq2 := R12y - m2\,g = m2\left(r2\cos(\theta 2(t))\left(\frac{d}{dt}\theta 2(t)\right)^2 + r2\sin(\theta 2(t))\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta 2(t)\right)\right)$$

La terza equazione si riferisce al bilancio dei momenti calcolato rispetto al baricentro G2.
In questo modo non comparirà il contributo della forza peso e della forza d'inerzia Fin = - m2 * AG2,
ma compariranno i momenti esercitati dalle forze di reazione della cerniera

eq3 := terza equazione,
ovvero -------> - R12y*r2*sin(theta2(t)) - r2*R12x*cos(theta2(t)) = IG2 * diff(diff(theta2(t),t),t);

$$eq3 := -R12y\,r2\,\sin(\theta2(t)) - r2\,R12x\cos(\theta2(t)) = IG2\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta2(t)\right)$$

Questo sistema si può risolvere numericamente, discretizzando il tempo in intervallini
di durata costante e pari a delta_t, cosicchè il tempo è scandito dal susseguirsi degli istanti discretizati.
Per impostare le equazioni si introducono i valori dei tre angoli che si susseguono
in corrispondenza ai primi tre istanti di tempo.

ϑ iniziale = t2_i,

ϑ1 = t2_i1,

ϑ2 = t2_i2.

Se si adotta il metodo basato sulle differenze finite (che in questo caso non è molto adatto) si ottiene

$$sostituzioni = \left\{\frac{d}{dt}\theta2(t) = \frac{t2\_i1 - t2\_i}{delta\_t}, \theta2(t) = \theta2, \frac{d^2}{dt^2}\theta2(t) = \frac{t2\_i2 - 2\,t2\_i1 + t2\_i}{delta\_t^2}\right\}$$

$$equaz1 := R12x = m2\left(-\frac{r2\sin(\theta2)\,(t2\_i1 - t2\_i)^2}{delta\_t^2} + \frac{r2\cos(\theta2)\,(t2\_i2 - 2\,t2\_i1 + t2\_i)}{delta\_t^2}\right)$$

$$equaz2 := R12y - m2\,g = m2\left(\frac{r2\cos(\theta2)\,(t2\_i1 - t2\_i)^2}{delta\_t^2} + \frac{r2\sin(\theta2)\,(t2\_i2 - 2\,t2\_i1 + t2\_i)}{delta\_t^2}\right)$$

$$equaz3 := -R12y\,r2\sin(\theta2) - r2\,R12x\cos(\theta2) = \frac{IG2\,(t2\_i2 - 2\,t2\_i1 + t2\_i)}{delta\_t^2}$$

Il sistema di tre equazioni differenziali è diventato un sistema di tre equazioni algebrico che si risolve
nelle tre variabili

R12x, R12y, componenti della reazione,

t2_i2, angolo ϑ al terzo istante.

Per affrontare il problema occorre quindi dare per noti gli angoli ϑ ai primi due istanti di tempo.

$$soluzione := \Big\{$$

$$R12x = -\frac{1}{(IG2 + r2^2\, m2)\, delta\_t^2} (m2\, r2 \sin(\theta 2)\, (t2\_i1^2\, IG2 + r2^2\, m2\, t2\_i1^2 - 2\, t2\_i1\, t2\_i\, IG2 - 2\, r2^2\, m2\, t2\_i1\, t2\_i + t2\_i^2\, IG2 + r2^2\, m2\, t2\_i^2 + \cos(\theta 2)\, m2\, r2\, g\, delta\_t^2)),$$

$$t2\_i2 = -\frac{m2\, r2 \sin(\theta 2)\, g\, delta\_t^2 - 2\, IG2\, t2\_i1 + IG2\, t2\_i - 2\, r2^2\, m2\, t2\_i1 + r2^2\, m2\, t2\_i}{IG2 + r2^2\, m2},$$

$$R12y = -\frac{1}{(IG2 + r2^2\, m2)\, delta\_t^2} (m2\, (-g\, delta\_t^2\, IG2 - g\, delta\_t^2\, r2^2\, m2 - r2 \cos(\theta 2)\, t2\_i1^2\, IG2 - r2^3 \cos(\theta 2)\, t2\_i1^2\, m2 + 2\, r2 \cos(\theta 2)\, t2\_i1\, t2\_i\, IG2 + 2\, r2^3 \cos(\theta 2)\, t2\_i1\, t2\_i\, m2 - r2 \cos(\theta 2)\, t2\_i^2\, IG2 - r2^3 \cos(\theta 2)\, t2\_i^2\, m2 + r2^2 \sin(\theta 2)^2\, m2\, g\, delta\_t^2))\Big\}$$

$$\theta 2 := t2\_i$$

In particolare l'angolo ϑ al terzo istante si trova, in questo semplice caso, addirittura analiticamente

$$-\frac{m2\, r2 \sin(t2\_i)\, g\, delta\_t^2 - 2\, IG2\, t2\_i1 + IG2\, t2\_i - 2\, r2^2\, m2\, t2\_i1 + r2^2\, m2\, t2\_i}{IG2 + r2^2\, m2}$$

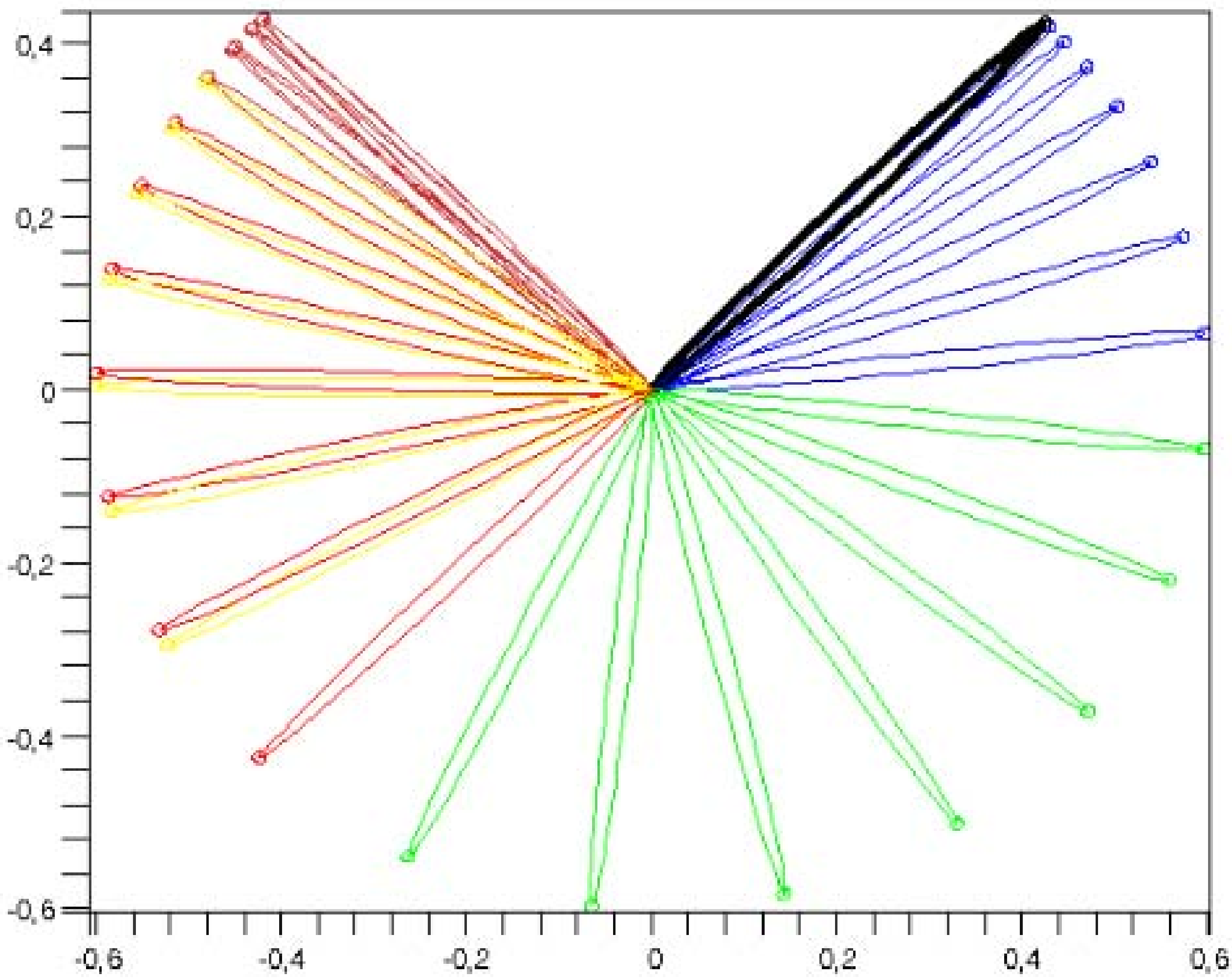
Si assegnano ora i seguenti valori numerici (si assumono le unità di misura del S.I.)

$$IG2 := 0.15$$
$$r2 := 0.3$$
$$l := 0.6$$
$$m2 := 0.480$$
$$g := 9.807$$
$$delta\_t := 0.001$$

Procedendo per iterazioni successive si perviene alla legge del moto.

$$inizio := 1$$
$$intervallo := 10$$

$$fine := 2500$$



In alternativa si poteva procedere assegnando posizione e velocità iniziale, ricavando l'accelerazione Alpha2 dal sistema delle 3 equazioni di bilancio delle forze e dei momenti

$$eq1 := R12x = m2\,(-r2\,\sin(\theta 2(t))\,\omega 2(t)^2 + r2\,\cos(\theta 2(t))\,\alpha 2(t))$$

$$eq2 := R12y - m2\,g = m2\,(r2\,\cos(\theta 2(t))\,\omega 2(t)^2 + r2\,\sin(\theta 2(t))\,\alpha 2(t))$$

$$eq3 := -R12y\,r2\,\sin(\theta 2(t)) - r2\,R12x\cos(\theta 2(t)) = IG2\,\alpha 2(t)$$

Risolvendo il sistema si trovano le espressioni delle componenti scalari della reazione della cerniera e l'accelerazione anglare:

$$soluzione = \left\{ R12x = -\frac{1}{r2^2 \sin(\theta 2(t))^2\, m2 + r2^2 \cos(\theta 2(t))^2\, m2 + IG2} \left(m2\, r2 \sin(\theta 2(t)) \left(\omega 2(t)^2\, r2^2 \sin(\theta 2(t))^2\, m2 + \omega 2(t)^2\, r2^2 \cos(\theta 2(t))^2\, m2 + \omega 2(t)^2\, IG2 + m2\, r2 \cos(\theta 2(t))\, g\right)\right),\right.$$

$$R12y = \frac{1}{r2^2 \sin(\theta 2(t))^2\, m2 + r2^2 \cos(\theta 2(t))^2\, m2 + IG2} \left(m2 \left(g\, r2^2 \cos(\theta 2(t))^2\, m2 + g\, IG2 + r2^3 \cos(\theta 2(t))\, \omega 2(t)^2 \sin(\theta 2(t))^2\, m2 + r2^3 \cos(\theta 2(t))^3\, \omega 2(t)^2\, m2 + r2 \cos(\theta 2(t))\, \omega 2(t)^2\, IG2\right)\right),$$

$$\left. \alpha 2(t) = -\frac{r2 \sin(\theta 2(t))\, m2\, g}{r2^2 \sin(\theta 2(t))^2\, m2 + r2^2 \cos(\theta 2(t))^2\, m2 + IG2} \right\}$$

In particolare l'espressione dell'accelerazione vale:

$$-\frac{r2 \sin(\theta 2(t))\, m2\, g}{r2^2 \sin(\theta 2(t))^2\, m2 + r2^2 \cos(\theta 2(t))^2\, m2 + IG2}$$

Assegnando i valori numerici

$$IG2 := 0.15$$
$$r2 := 0.3$$
$$l := 0.6$$
$$m2 := 0.480$$
$$g := 9.807$$
$$delta\_t := 0.001$$

la prima condizione iniziale

$$TE2_1 := 2.356194490$$

e la seconda condizione iniziale.

$$OM2_1 := 0.$$

Essendo $\omega 2 = (\vartheta(t+\Delta t)-\vartheta(t)) / \Delta t$ si ottiene subito

$\vartheta(t+\Delta t) = \vartheta(t) + \omega 2\ \Delta t$

$$TE2_2 := 2.356194490$$

Inoltre essendo $\alpha 2 = (\omega(t+\Delta t)-\omega(t)) / \Delta t$ si ottiene subito

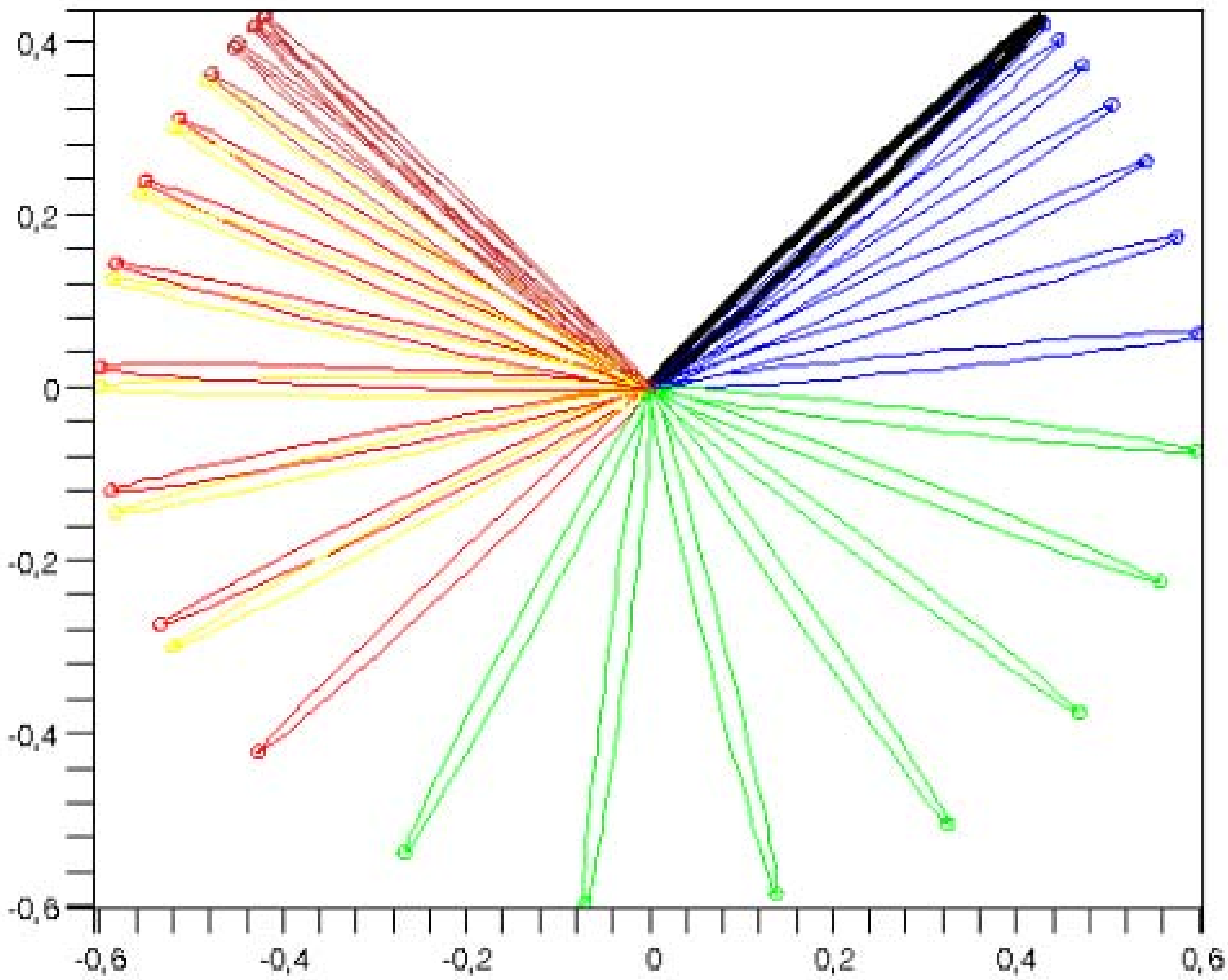
$\omega(t+\Delta t) = \omega(t) + \alpha 2\ \Delta t$

ove $\alpha 2$ viene calcolata avendo risolto il sistema

$$alpha\_iterata = -5.168643133$$
$$OM2_2 := -0.005168643133$$

A questo punto si apre un ciclo che di volta in volta calcola l'accelerazione e poi aggiorna i dati relativi all'istante immediatamente successivo, con procedimento passo passo.

$$inizio := 3$$
$$intervallo := 10$$
$$fine := 2500$$



0,4
0,2
0
-0,2
-0,4
-0,6
-0,6
-0,4
-0,2
0
0,2
0,4
0,6